UNE APPROCHE SÉQUENTIELLE DE L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN GÉNÉRALISÉE

par

Anne de Roton

Résumé. — Une généralisation du théorème de Beurling et Nyman établit que l'hypothèse de Riemann pour une fonction F de la classe de Selberg est équivalente à l'appartenance de la fonction χ, indicatrice de l'intervalle $]0,1[$ à l'adhérence d'un sous-espace de fonctions $\mathcal{B}_F$ dans l'espace $L^2(0,+\infty)$. Dans cet article, l'auteur étend aux fonctions F de la classe de Selberg un résultat de Báez-Duarte en donnant une construction d'une suite de $\mathcal{B}_F$ qui, sous l'hypothèse de Riemann pour la fonction F, converge dans $L^2(0,+\infty)$ vers la fonction χ.

***Abstract* (An approach of generalised Riemann hypothesis throught sequences)**

A generalisation of the Beurling and Nyman criterion implies that the Riemann hypothesis for a function F in the Selberg class is equivalent to the statement that χ, the caracteristic function of $(0,1)$ belongs to the adherence in $L^2(0,+\infty)$ of a subspace $\mathcal{B}_F$. In this article, the author generalises a result of Báez-Duarte to the Selberg class and gives a construction of some sequence of $\mathcal{B}_F$ converging to χ in $L^2(0,+\infty)$ under Riemann hypothesis for F.

1. Présentation des résultats; historique

Le théorème de Beurling et Nyman (cf **[Be]** et **[BS1]** pour une analyse) établit une correspondance entre des régions sans zéro de la fonction ζ de Riemann et la densité de l'espace de fonctions $\widetilde{\mathcal{B}}$ suivant

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \left\{ t \mapsto \sum_{k=1}^{n} c_k \left\{ \frac{\theta_k}{t} \right\}, n \in \mathbb{N},\ c_k \in \mathbb{C},\ 0 < \theta_k \leq 1, \sum_{k=1}^{n} c_k \theta_k = 0 \right\},$$

où $\{.\}$ représente la fonction partie fractionnaire.

Il établit en particulier que pour tout nombre réel $p > 1$, l'absence de zéro de ζ dans le demi-plan $\Re(s) > 1/p$ est équivalente à l'appartenance de la fonction χ indicatrice de l'intervalle $]0,1[$ à l'adhérence de $\widetilde{\mathcal{B}}$ dans $L^p(0,1)$. Bercovici et Foias étendent dans **[BF]** ce résultat au cas $p = 1$.

L'étude des régions sans zéro de la fonction ζ de Riemann est donc liée à la recherche de suites $(f_n)_n$ de fonctions de $\widetilde{\mathcal{B}}$ telles que la norme $\|\chi - f_n\|_p$ tende vers 0. La formule $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k)\{1/kt\} = -1$ pour $0 < t \leq 1$, issue de formules classiques sur la fonction μ de Möbius, conduit naturellement à considérer les sommes partielles

$$S_n(t) = -\sum_{k=1}^{n} \mu(k)\{1/kt\}.$$

Dans [**BD1**], Báez-Duarte modifie les fonctions $(S_n)_n$ pour obtenir des fonctions B_n de $\widetilde{\mathcal{B}}$ qui, sous l'hypothèse de non-annulation de ζ dans le demi-plan $\{Res > 1/p\}$, convergent vers χ dans l'espace $L^r(0,1)$ pour tout réel r vérifiant $1 < r < 2 - 1/p$. Balazard et Saias montrent dans [**BS1**] que cette hypothèse de non-annulation est en fait équivalente à la convergence de la suite de fonctions $(B_n)_n$ vers χ dans $L^r(0,1)$ pour tout r vérifiant $0 < r < p$.

Nous nous intéressons dans cet article au cas $p = 2$, essentiellement dû à Nyman et détaillé dans [**BS2**], du théorème de Beurling et Nyman qui fournit, par symétrie des zéros de ζ, un critère d'analyse fonctionnelle pour l'hypothèse de Riemann (HR).

Notant $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions de la forme

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \left\{ \frac{\theta_k}{t} \right\}, \text{ avec } n \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{C}, 0 < \theta_k \leq 1,$$

les auteurs de [**BDBLS**] reformulent ce critère dans $L^2(0,+\infty)$: HR est équivalente à l'appartenance de la fonction χ à l'adhérence de $\mathcal{B}$ dans $L^2(0,+\infty)$. Báez-Duarte démontre dans l'article [**BD2**] que, même sous HR, les suites naturelles $(B_n)_n$ et $(S_n)_n$ divergent dans $L^2(0,+\infty)$. En lissant la suite $(S_n)_n$, il parvient néanmoins dans [**BD3**] à construire une suite $(F_n)_n$ de $\mathcal{B}$ qui converge vers χ dans $L^2(0,+\infty)$. La construction explicite de cette suite, qui garantit une certaine vitesse de convergence, est dûe à Balazard. Báez-Duarte démontre ainsi que l'hypothèse de Riemann est équivalente à l'assertion : $\chi \in \overline{\mathcal{B}^{nat}}$ où $\mathcal{B}^{nat}$ désigne le sous-espace des fonctions de $\mathcal{B}$ pour lesquelles les θ_k sont des inverses d'entiers positifs.

Nous avons étendu dans [**dR2**] le théorème de Beurling et Nyman dans le cas $p = 2$ aux fonctions de la classe de Selberg. Nous allons dans cet article étendre le résultat de Báez-Duarte et Balazard, présenté dans [**BD3**] à cette même classe de fonctions.

Commençons par rappeler la définition de la classe de Selberg S, introduite en 1989 dans [**S**], et qui est conjecturalement l'ensemble des fonctions L de formes automorphes.

Définition 1. — *On dit qu'une fonction F appartient à la classe de Selberg S si F vérifie les conditions suivantes :*

1. *Pour $\Re s > 1$, $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$ est une série de Dirichlet absolument convergente;*

2. *il existe un entier naturel m tel que $(s-1)^m F(s)$ soit une fonction entière d'ordre fini;*
3. *la fonction F satisfait une équation fonctionnelle de la forme :*

$$\Phi(s) = \omega\overline{\Phi(1-\overline{s})} \quad \text{où } \Phi(s) = Q^s\Delta(s)F(s),$$

   avec $\Delta(s) = \prod_{j=1}^{r}\Gamma(\lambda_j s + \mu_j)$, $\lambda_j > 0$, $\Re\mu_j \geq 0$, $Q > 0$ et $|\omega| = 1$;

4. *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $M(\varepsilon)$ tel que $|a(n)| \leq M(\varepsilon)n^{\varepsilon}$;*
5. *pour $\Re s$ assez grand, $\log F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} b(n)n^{-s}$ où $b(n) = 0$ si n n'est pas une puissance d'un nombre premier et $b(n) = O(n^{\theta})$ pour un $\theta < 1/2$.*

Étudiée dans de nombreux articles, la classe de Selberg est en particulier l'objet dans **[KP0]** d'un survol de Kaczorowski et Perelli.

Notations 1. — *On note $d = 2\sum_{j=1}^{r}\lambda_j$ le degré de F, m_F l'ordre du pôle éventuel de F en $s=1$ et $\overline{f}$ la fonction $s \mapsto \overline{f(\overline{s})}$.*
L'assertion 5 implique que la fonction F admet un développement en produit Eulérien de la forme $F(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} F_p(s)$, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers et $F_p(s) = \sum_{k=0}^{+\infty}\beta(k)p^{-ks}$.

On distingue parmi les zéros d'une fonction F de la classe de Selberg les zéros de la forme $-(n+\mu_j)/\lambda_j$, $n \in \mathbb{N}$, $j \in [1, r]$, que l'on appelle zéros triviaux de $F\cdot$ Les zéros non triviaux de F sont de partie réelle comprise entre 0 et 1. La droite d'équation $\Re s = 1/2$ est appelée droite critique.

Conjecture 1. — *Les zéros non triviaux de F sont de partie réelle égale à $1/2$.*

C'est ce que l'on appelle hypothèse de Riemann généralisée pour la fonction F(HRG).

Afin de caractériser l'hypothèse de Riemann généralisée pour une fonction F de la classe de Selberg, nous définissons la fonction complémentaire associée à F par

$$\Psi_F : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \operatorname{Res}\left(\frac{x^s}{s}F(s), 1\right) - \sum_{n\leq x} a(n), \end{array}$$

la fonction $\Psi_F^{(1)}$ par $\Psi_F^{(1)}(x) = \Psi_F(1/x)$ et le sous-espace de fonctions suivant :

$$\mathcal{B}_F = \left\{ f : t \mapsto \sum_{k=1}^{n} c_k \Psi_F\left(\frac{\theta_k}{t}\right),\ n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [1,n], c_k \in \mathbb{C}, 0 < \theta_k \leq 1 \right\}.$$

Nous avons démontré dans **[dR2]** que pour une fonction F de S, (HRG) est équivalente à

$$\Psi_F^{(1)} \in L^2(0,+\infty) \text{ et } \chi \in \overline{\mathcal{B}_F}.$$

La démonstration de ce résultat est essentiellement basée sur la formule suivante.

$$\mathcal{M}\Psi_F^{(1)}(s) = -\frac{F(s)}{s}, \text{ pour } \frac{1}{2} < \Re s < 1, \tag{1}$$

où $\mathcal{M}f$, la transformée de Mellin de f, est définie par $\mathcal{M}f(s) = \int_0^{+\infty} f(t)t^{s-1}\mathrm{d}t$. La condition $\Psi_F^{(1)} \in L^2(0,+\infty)$ est vérifiée pour les fonctions F de S de degré $d < 4$ (voir [**dR1**]).

Nous démontrons dans cet article le résultat suivant, qui est une extension du résultat de Báez-Duarte et Balazard.

Théorème I. — *Soit F une fonction de la classe de Selberg vérifiant l'hypothèse de Riemann généralisée. Notons $(a^{-1}(n))_{n\geq 1}$ les coefficients de sa série de Dirichlet inverse F^{-1}. Alors il existe un entier positif N_0 tel que pour tout entier $N \geq N_0$, la distance dans $L^2(0,+\infty)$ entre la fonction χ, indicatrice de l'intervalle $]0,1[$, et la fonction*

$$x \mapsto -\sum_{n=1}^{N} a^{-1}(n)e^{-a\frac{\log n}{\log\log N}}\Psi_F(1/nx),$$

où a désigne une constante dépendant uniquement de F, est $O\left((\log\log N)^{-1/3}\right)$.

Nous en déduisons immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 1. — *Soit F une fonction de la classe de Selberg. Alors l'hypothèse de Riemann pour F est équivalente à la propriété :*

$$\Psi_F^{(1)} \in L^2(0,+\infty) \text{ et } \chi \in \overline{\mathcal{B}_F{}^{nat}},$$

où $\mathcal{B}_F{}^{nat}$ est le sous-ensemble des fonctions f de $\mathcal{B}_F$, définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$f(t) := \sum_{k=1}^{n} c_k \Psi_F\left(\frac{1}{kt}\right),\ n \in \mathbb{N}^*,\ c_k \in \mathbb{C}.$$

Afin d'obtenir ces résultats, nous étudierons dans la partie 2 l'ordre de grandeur de l'inverse d'une fonction F de S ainsi que des coefficients $a^{-1}(n)$. La partie 3 sera consacrée à la démonstration du théorème I.

Notations 2. — *Dans toute la suite, s désignera un nombre complexe de partie réelle σ et de partie imaginaire τ et F sera une fonction de S. De plus, les constantes implicites dans les notations O et $\ll$ ne dépendront que de la fonction F.*

L'auteur souhaite remercier chaleureusement Michel Balazard qui a encadré ce travail en thèse ainsi que Bruno Martin et Alberto Perelli pour des conversations mathématiques éclairantes. Elle exprime également ici sa gratitude à l'égard du "lecteur-arbitre" anonyme auquel la forme finale de cet article doit beaucoup.

2. Inverse d'une fonction de la classe de Selberg

L'inverse de F est une série de Dirichlet formelle dont les coefficients, que l'on note $a^{-1}(n)$, sont définis par (voir sections I.2.3 et I.2.4 de [**Te**])

$$\begin{cases} a^{-1}(1) = 1 \\ a^{-1}(n) = \sum_{d|n, d<n} a(n/d)a^{-1}(d) \ (n > 1). \end{cases} \tag{2}$$

2.1. Ordre de grandeur des coefficients. — Les axiomes 4 et 5 et la relation (2) permettent d'obtenir, à l'aide de démonstrations par récurrence, des majorations de la taille des coefficients $a^{-1}(n)$. On obtient ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, la majoration $|a^{-1}(n)| \ll_\varepsilon n^{1+\theta+\varepsilon}$. La proposition suivante permet d'améliorer cette majoration si on suppose que la fonction F vérifie l'hypothèse de Riemann généralisée. Elle est en fait valable même si l'axiome 4 de la définition de S n'est pas vérifié.

Proposition 2.1. — *Soit F une fonction de la classe de Selberg vérifiant l'hypothèse de Riemann généralisée. Alors F^{-1} est une série de Dirichlet d'abscisse de convergence $\sigma_c \leq 1/2$. On a donc en particulier*

$$\forall \varepsilon > 0, \ a^{-1}(n) = O_\varepsilon\left(n^{1/2+\varepsilon}\right). \tag{3}$$

Démonstration. La fonction F^{-1} est holomorphe dans le demi-plan $\sigma > 1/2$. D'après [**L**], *Satz* 5, F^{-1} est une série de Dirichlet d'abscisse de convergence σ_c finie. Une application d'un lemme similaire au *Satz 4* de [**L**] à la fonction

$$h(s) = F(s)\left(\frac{s-1}{s}\right)^{m_F}$$

qui est holomorphe sans zéro dans le demi-plan $\sigma > 1/2$, tend vers 1 uniformément en τ lorsque σ tend vers l'infini et vérifie que pour tout $\delta > 0$, il existe un réel $c = c(\delta)$ tel que $h(s) = O\left((1 + |\tau|)^c\right)$ uniformément pour $\sigma \geq 1/2 + \delta$ et $\tau \in \mathbb{R}$, fournit pour tout $\varepsilon > 0$ la majoration

$$1/h(s) = O_\varepsilon\big((1 + |\tau|)^\varepsilon\big) \qquad (\sigma > 1/2).$$

La même majoration vaut pour F^{-1} et on peut donc conclure en appliquant le théorème de Landau-Schnee (voir [**Te**], section II.2.2) à la fonction F^{-1}. $\square$

Sous l'hypothèse, conjecturalement vraie pour toutes les fonctions F de la classe de Selberg, que pour tout nombre premier p, $F_p(s)^{-1}$ est un polynôme en p^{-s} de degré r indépendant de p, on peut montrer par des arguments classiques

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, a^{-1}(n) = O_\varepsilon\left(n^\varepsilon\right). \tag{4}$$

Cette majoration de la taille des coefficients $a^{-1}(n)$ est en fait valable inconditionnellement pour des entiers criblés, comme l'atteste le *lemma 1* de [KP1]. Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $z(\varepsilon) > 0$ tel que

$$(n, P(z(\varepsilon))) = 1 \Rightarrow |a^{-1}(n)| \leq n^\varepsilon, \text{ avec } P(z) = \prod_{p \leq z} p. \tag{5}$$

Cette majoration et un argument semblable à celui de R. Murty dans sa démonstration d'une majoration de $b(p^k)$ dans **[M]** permettent d'obtenir la majoration suivante. Ce résultat sera publié dans le livre **[KP2]**, actuellement en cours d'écriture. Cet ouvrage n'étant pas encore disponible, nous donnons ici une démonstration succincte de cette majoration.

Proposition 2.2. — *Pour tout réel $\beta > \theta$, il existe une constante positive C, ne dépendant que de β et θ tels que pour tout entier positif n, on ait*

$$|a^{-1}(n)| \leq Cn^{\beta},$$

où $\theta < 1/2$ est défini à l'axiome 5 de la classe de Selberg.

Démonstration. Soit β un réel vérifiant $\theta < \beta$ et H un réel tel que $|b(n)| \leq Hn^{\theta}$ pour tout entier positif n. La majoration (5) de **[KP1]** assure l'existence d'un réel $z = z(\beta)$ tel que pour tout entier positif n premier avec z, on ait $|a^{-1}(n)| \leq n^{\beta}$. Montrons à présent qu'il existe une constante positive K telle pour tout nombre premier p et tout entier naturel m, on ait $|a^{-1}(p^m)| \leq Kp^{m\beta}$. Le fait que la suite $(a^{-1}(n))_n$ soit multiplicative permet alors de conclure puisque l'on a

$$|a^{-1}(n)| \leq K^{z(\beta)}n^{\beta}.$$

Un calcul de la dérivée logarithmique de F^{-1} permet d'obtenir pour tout nombre premier p et tout entier $m \geq 1$ l'égalité suivante.

$$ma^{-1}(p^m) = -\sum_{k=1}^{m} kb(p^k)a^{-1}(p^{m-k}). \tag{6}$$

Fixons à présent le nombre premier p. Une récurrence sur m et la majoration de l'axiome 5 permettent d'obtenir la majoration $|a^{-1}(p^m)| \leq A_m p^{m\theta}$ où $(A_m)_m$ est défini par $A_0 = 1$ et pour $m \geq 1$,

$$mA_m = H\sum_{k=1}^{m} kA_{m-k}. \tag{7}$$

La relation de récurrence (7) permet de calculer la série génératrice associée à la suite $(A_m)_m$

$$A(z) := \sum_{m\geq 0} A_m z^m = \exp\left(\frac{Hz}{1-z}\right),$$

donc d'obtenir l'expression suivante de A_m pour $m \geq 1$,

$$A_m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m-1}{n-1}\frac{H^n}{n!}.$$

L'utilisation de la formule de Stirling réelle assure alors l'existence d'une constante positive A ne dépendant que de H telle que pour tout nombre premier p et tout entier naturel m, on ait

$$|a^{-1}(p^m)| \leq Ae^{4\sqrt{Hm}}p^{m\theta}.$$

La suite $(Ae^{4\sqrt{Hm}}2^{-m\varepsilon})_m$ étant bornée, on obtient bien le résultat annoncé. □

2.2. Majoration de l'inverse d'une fonction de S. —

2.2.1. Majorations classiques. — Commençons par donner quelques estimations classiques, dont les démonstrations sont analogues à celles de l'étude de la fonction ζ que Titchmarsh a menée dans [**Ti**], chapitres IX et XIV. Le lecteur pourra consulter [**dR0**] pour une démonstration détaillée de ces résultats.

Définition 2. — *Pour $T > 0$, on définit $N_F(T)$, le nombre de zéros $\rho = \beta + i\gamma$ de F vérifiant $0 \leq \beta \leq 1$ et $0 < \gamma \leq T$.*

On a classiquement

$$N_F(T+1) - N_F(T) = O(\log T) \qquad (T > 0). \tag{8}$$

Notations 3. — *Pour tout réel t, on note*

$$\mathcal{L}(t) = \frac{\log(|t|+3)}{\log\log(|t|+3)}.$$

Si F vérifie HRG, alors

- il existe une constante $k_1 > 0$ telle que
$$|F(\sigma + i\tau)| \leq e^{k_1 \mathcal{L}(\tau)} \tag{9}$$
- il existe une constante $k_2 > 0$ telle que
$$|F(\sigma + i\tau)|^{-1} \leq e^{k_2 \mathcal{L}(\tau)/(\sigma - 1/2)} \tag{10}$$
pour $1/2 < \sigma \leq 1$ et $|\tau| \geq 3$;
- il existe deux constantes positives absolue c_1 et c_2 telles que, pour tous nombres réels σ et τ vérifiant :
$$|\tau| \geq 3,\ \frac{1}{2} + \frac{c_1}{\log\log|\tau|} \leq \sigma \leq 1,$$
on a
$$|F(\sigma + i\tau)|^{-1} \leq e^{c_2 \mathcal{L}(\tau)}. \tag{11}$$

2.2.2. Majoration du quotient $F(s)/F(s+A)$ sur la droite critique. — Dans son article [**Bu**], Burnol donne une majoration uniforme de $\zeta(s)/\zeta(s+A)$ sur la droite critique. Nous allons ici généraliser cette majoration pour une fonction de la classe de Selberg.

Proposition 2.3. — *Soit F une fonction de la classe de Selberg vérifiant HRG et A un réel vérifiant $0 \leq A \leq 1/2$. Alors, sur la droite critique, on a*

$$\left|\frac{F(z)}{F(z+A)}\right| = O(|z|^{Ad/2}).$$

Démonstration. Soit $0 < A \leq 1/2$. Pour $\Re(s) \geq 1/2$, on considère la fonction

$$h_A(s) = \frac{(s-1-A/2)^{m_F} F(s-A/2)}{(s-1+A/2)^{m_F} F(s+A/2)} \frac{1}{s^{dA/2}}.$$

– Si $s = 1/2 + i\tau$, alors $z := s + A/2 = (1+A)/2 + i\tau$ vérifie $1/2 < \Re z \leq 3/4$ et en utilisant l'équation fonctionnelle de F et le lemme 3.2 de **[dR1]**, on obtient :

$$\left|\frac{F(s-A/2)}{F(s+A/2)}\right| = \left|\frac{\overline{F}(1-z)}{F(z)}\right| = \left|Q^{2z-1}\frac{\Delta(z)}{\overline{\Delta}(1-z)}\right| = O\left(|z|^{d(\Re z - 1/2)}\right) = O\left(|s|^{dA/2}\right),$$

où les constantes implicites ne dépendent que de F. On a donc $h_A(s) = O(1)$ sur la droite critique, uniformément pour $0 \leq A \leq 1/2$.

– D'autre part, $\lim_{\sigma\to+\infty} F(s) = 1$, donc il existe $\Lambda_0 > 1$, tel que pour tout $\sigma \geq \Lambda_0$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$, on ait

$$\left|\frac{F(s-A/2)}{F(s+A/2)}\right| \leq 4 \text{ donc } |h_A(s)| \leq 4|s|^{-dA/2} \leq 4\Lambda_0^{-dA/2} \leq 4.$$

Appliquant le principe de Phragmén-Lindelöf à la fonction h_A, holomorphe dans $\{\sigma \geq 1/2\}$ entre $\{\Re s = 1/2\}$ et $\{\Re s = \Lambda_0\}$, on obtient $h_A(s) = O(1)$ uniformément pour A tel que $0 \leq A \leq 1/2$ et s tel que $1/2 \leq \sigma \leq \Lambda_0$. En particulier, pour $s = (1+A)/2 + i\tau$ et donc $z = s - A/2 = 1/2 + i\tau$, on a

$$\left|\frac{F(z)}{F(z+A)}\right| = O(|z|^{Ad/2}),$$

uniformément par rapport à A tel que $0 \leq A \leq 1/2$. □

Cette majoration permettra de pallier l'absence de majoration uniforme de $|F(s)|^{-1}$ pour $\sigma > 1/2$.

3. Explicitation d'une suite de $\mathcal{B}_F$ tendant vers χ dans $L^2(0, +\infty)$

Comme dans le cas de la fonction ζ de Riemann, on définit la suite “naturelle”

$$S_{n,F}(t) = \sum_{k=1}^{n} a^{-1}(k)\Psi_F^{(1)}(kt)$$

et on la modifie par un procédé de construction analogue à celui que Báez-Duarte expose dans **[BD3]** afin d'obtenir une suite convergente de $L^2(0, +\infty)$.

Proposition 3.1. — *Soit F une fonction de la classe de Selberg vérifiant HRG. Alors il existe deux constantes positives a et b et un entier naturel N_0 ne dépendant que de F tels que, pour tous réels t, $\delta > 0$ et tout entier $N \geq N_0$ vérifiant*

$$\frac{a}{\log\log N} \leq \delta \leq \frac{1}{2}$$

on ait uniformément

$$\sum_{n\leq N}\frac{a^{-1}(n)}{n^{\frac{1}{2}+\delta+it}}=\frac{1}{F\left(\frac{1}{2}+\delta+it\right)}+O(N^{-\delta/3}\exp\left(b\left(\mathcal{L}(t)\right)\right)).$$

Démonstration. Dans cette démonstration, N_0 sera un entier assez grand et δ un réel tel que $0<\delta\leq 1/2$. D'après la proposition 2.2, il existe $\alpha\in]0,1/2[$ et $C>0$ tels que $|a^{-1}(n)|\leq Cn^{\alpha}$.

Les axiomes 4 et 5 assurent que la fonction F^{-1} est une série de Dirichlet d'abscisse de convergence absolue $\sigma_a\leq 1$.

En lui appliquant la formule de Perron effective (théorème II.2.3 de [**Te**]), puis un calcul classique semblable à celui de la démonstration du corollaire II.2.4 de [**Te**], on obtient pour $z=1/2+\delta+it$, $c=\frac{1}{2}+\alpha-\delta+1/\log 3N$ et pour tout entier N et tout réel T tel que $N\geq T\geq 2$,

$$\sum_{n\leq N}\frac{a^{-1}(n)}{n^z}=\frac{1}{2i\pi}\int_{c-iT}^{c+iT}F^{-1}(s+z)\frac{N^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{N^{\frac{1}{2}+\alpha-\delta}}{T}\log N\right),$$

où $c:=\frac{1}{2}+\alpha-\delta+1/\log 3N$.
On supposera $N\geq N_0=N_0(F,\alpha)$.

Déplaçons à présent le segment d'intégration à l'abscisse $c'=-\delta/2$ en appliquant le théorème des résidus. On obtient :

$$\sum_{n\leq N}\frac{a^{-1}(n)}{n^z}=F(z)^{-1}+I_1-I_-+I_++O\left(\frac{N^{\frac{1}{2}+\alpha-\delta}}{T}\log N\right),\tag{12}$$

où

$$I_\pm=\frac{1}{2i\pi}\int_{c'\pm iT}^{c\pm iT}F^{-1}(s+z)\frac{N^s}{s}\mathrm{d}s \text{ et } I_1=\frac{1}{2i\pi}\int_{c'-iT}^{c'+iT}F^{-1}(s+z)\frac{N^s}{s}\mathrm{d}s.$$

– Si $|t|\leq N^{1/2+\alpha}$, on choisit $T=2N^{1/2+\alpha}$. Le reste dans (12) est alors $O(N^{-\delta/3})$. Sur les segments horizontaux, on a $N^{1/2+\alpha}\leq|\tau+t|$ et donc, si $a\geq 4c_1$ et $N\geq N_0$, alors

$$\Re(s+z)\geq\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}\geq\frac{1}{2}+\frac{a}{2\log\log N}\geq\frac{1}{2}+\frac{c_1}{\log\log|t+\tau|}$$

et d'après (11), on a

$$|F(s+z)|^{-1}\leq e^{c_2\mathcal{L}(|t+\tau|)}\ll e^{2c_2\mathcal{L}(N)}.$$

La contribution des segments horizontaux est donc, pour N_0 assez grand

$$\ll\frac{1}{T}\exp\left(O(\mathcal{L}(N))\right)\frac{N^{1/2+\alpha-\delta+1/\log 3N}}{\log N}\ll N^{-\delta+O(1/\log\log N)}\ll N^{-\delta/3}.$$

La majoration (10) permet de majorer la contribution des $\tau \in [c'-iT, c'+iT]$ vérifiant $|t+\tau| \leq e^{\sqrt{\log N}}$ par
$$O\left(\frac{N^{-\delta/2}}{\delta}\exp\left(O\left(\sqrt{\log N}\right)\right)\right) = O(N^{-\delta/3}).$$
Sur le reste de l'intervalle $[c'-iT, c'+iT]$, on utilise (11) qui donne
$$F^{-1}(s+z) \leq \exp\left(O(\mathcal{L}(|t+\tau|))\right) \ll \exp\left(O\left(\log N/\log\log N\right)\right).$$
Comme
$$\int_{c'-iT}^{c'+iT}\frac{|\mathrm{d}s|}{|s|} \ll \log N,$$
quitte à choisir a assez grand, on a une contribution de ces termes
$$\ll N^{-\delta/2}\log N\exp\left(O\left(\mathcal{L}(N)\right)\right) \ll N^{-\delta/3},$$
ce qui conclut la démonstration dans ce premier cas.
- Si $|t| \geq N^{1/2+\alpha}$, on applique l'équation (12) en choisissant $T = \frac{1}{2}N^{1/2+\alpha}$. En remarquant que l'on a $|t+\tau| \asymp |t|$ sur tous les segments d'intégration, un raisonnement analogue au précédent permet de conclure la preuve. □

Proposition 3.2. — *Soit F une fonction de la classe de Selberg vérifiant HRG. On a uniformément pour $0 < A \leq 1/(2d)$,*
$$\int_{\Re z=1/2}\left|\frac{F(z)}{F(z+A)}-1\right|^2\frac{|\mathrm{d}z|}{|z|^2} \ll A^{2/3}.$$

Démonstration. D'après la proposition 2.3, sur la droite critique on a
$$\left|\frac{F(z)}{F(z+A)}\right| = O(|z|^{Ad/2}),$$
uniformément par rapport à A tel que $0 \leq A \leq 1/2$. On peut donc supposer A inférieur à une constante positive donnée au préalable, le résultat étant trivial dans le cas contraire.
On note γ la partie imaginaire d'un zéro générique de F.
Soit δ tel que $0 < \delta \leq 1$, et $E_1 := \bigcup_\gamma[\gamma-\delta, \gamma+\delta]$; $E_2 := \mathbb{R}\backslash E_1$.

Si $t \in E_1$ et $A \leq 1/(2d)$, la proposition 2.3 et la formule (8) donnent, pour $z = 1/2+it$:
$$\int_{\frac{1}{2}+iE_1}\left|\frac{F(z)}{F(z+A)}-1\right|^2\frac{|\mathrm{d}z|}{|z|^2} \ll \sum_\gamma \delta\gamma^{-3/2} \ll \delta.$$
D'autre part, avec le lemme α de **[Ti]**, section 3.9 et la formule (8), on obtient pour $0 \leq x \leq A$ et $t \in E_2$:
$$\frac{F'}{F}\left(\frac{1}{2}+x+it\right) = \sum_{|t-\gamma|\leq 1}\frac{1}{x+i(t-\gamma)} + O(\log(|t|+3)) \ll \delta^{-1}\log(|t|+3),$$

donc

$$\log\left(\frac{F\left(\frac{1}{2}+it\right)}{F\left(\frac{1}{2}+A+it\right)}\right)=-\int_0^A\frac{F'}{F}\left(\frac{1}{2}+x+it\right)\mathrm{d}x\ll A\delta^{-1}\log(|t|+3).$$

En utilisant l'inégalité $|e^u-1|\leq|u|e^{|u|}$, on en déduit

$$\left|\frac{F(z)}{F(z+A)}-1\right|\ll A\delta^{-1}\log(|t|+3)(|t|+3)^{c'A/\delta},$$

où c' est une constante positive absolue. Par conséquent,

$$\int_{\frac{1}{2}+iE_2}\left|\frac{F(z)}{F(z+A)}-1\right|^2\frac{|\mathrm{d}z|}{|z|^2}\ll A^2\delta^{-2}\int_{\mathbb{R}}\log^2(|t|+3)(|t|+3)^{2c'A/\delta-2}\ll A^2\delta^{-2},$$

pourvu que $A\leq\delta/4c'$, ce que nous supposerons. On choisit $\delta=A^{2/3}$ pour conclure, ce qui est possible si l'on suppose $A\leq(1/4c')^3$. □

Nous pouvons maintenant conclure la démonstration du théorème I donné en introduction.

Démonstration. Posons

$$f_{A,N}(x):=-\sum_{n=1}^N\frac{a^{-1}(n)}{n^A}\Psi_F(1/nx).$$

D'après (1), pour $1/2<\Re z<1$, on a

$$\mathcal{M}f_{A,N}(z)=\frac{F(z)}{z}\left(\sum_{n=1}^N\frac{a^{-1}(n)}{n^{z+A}}\right).$$

Par ailleurs, pour $\Re z>0$, on a $\mathcal{M}\chi(z)=-1/z$. Le théorème de Plancherel donne donc

$$||f_{A,N}-\chi||^2=\int_{\Re z=1/2}\left|F(z)\sum_{n=1}^N\frac{a^{-1}(n)}{n^{z+A}}-1\right|^2\frac{|\mathrm{d}z|}{|z|^2}$$

$$\leq 2\int_{\Re z=1/2}\left|F(z)\left(\sum_{n=1}^N\frac{a^{-1}(n)}{n^{z+A}}-F(z+A)^{-1}\right)\right|^2\frac{|\mathrm{d}z|}{|z|^2}+2\int_{\Re z=1/2}\left|\frac{F(z)}{F(z+A)}-1\right|^2\frac{|\mathrm{d}z|}{|z|^2}$$

en utilisant $(X+Y)^2\leq 2(X^2+Y^2)$. D'après la proposition 3.1, si $A\geq a/\log\log N$ et $z=1/2+it$, on a

$$\left|\sum_{n=1}^N\frac{a^{-1}(n)}{n^{z+A}}-F(z+A)^{-1}\right|=O\left(N^{-A/3}\exp(b\mathcal{L}(t))\right)$$

et d'après (9), on a $|F(z)|=\exp\left(O(\mathcal{L}(t))\right)$, donc

$$\int_{\Re z=1/2}\left|F(z)\left(\sum_{n=1}^N\frac{a^{-1}(n)}{n^{z+A}}-F(z+A)^{-1}\right)\right|^2\frac{|\mathrm{d}z|}{|z|^2}$$

$$\ll N^{-2A/3}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{O(\mathcal{L}(t))}\frac{\mathrm{d}t}{\frac{1}{4}+t^2}\ll N^{-2A/3}.$$

En utilisant la proposition 3.2, on obtient donc

$$||f_{A,N} - \chi||^2 \ll N^{-2A/3} + A^{2/3}.$$

Le choix $A = a/\log\log N$ permet de conclure. $\square$

Références

[BD1] L. Báez-Duarte, *On Beurling's real variable reformulation of the Riemann hypothesis*, Adv. in Maths **101** (1993), 10-30.

[BD2] L. Báez-Duarte, *A class of invariant unitary operators*, Adv. in Math **144** (1999), 1-12.

[BD3] L. Báez-Duarte, *A strengthening of the Nyman-Beurling criterion for the Riemann hypothesis*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei **9**, Mat. Appl. **14** (2003), n°1, 5-11. 1-12.

[BDBLS] L. Báez-Duarte, M. Balazard, B. Landreau, E. Saias, *Note sur la fonction zeta de Riemann, 1II*, Adv. in Maths. **149** (2000), n°1, 130-144.

[BS1] M. Balazard, E. Saias, *Note sur la fonction zeta de Riemann, 1*, Adv. in Maths. **139** (1998), 310-321.

[BS2] M. Balazard, E. Saias, *The Nyman-Beurling equivalent form for the Riemann hypothesis*, Expo. Math. **18** (2000), 131-138.

[BF] H. Bercovici, C. Foias, *A real variable restatement of Riemann's hypothesis*, Israel J. Maths. **48** (1984), 57-68.

[Be] A. Beurling, *A closure problem related to the Riemann Zeta-function*, Proc. Nat. Acad. Sci. **41** (1955), 312-314.

[Bu] J.-F. Burnol, *On an analytic estimate in the theory of the Riemann Zeta function and a theorem of Báez-Duarte*, à paraître dans Acta Cientifica Venezolana **54** (2003).

[dR0] A. de Roton *Généralisation du critère de Beurling-Nyman à la classe de Selberg*, thèse, université Bordeaux 1, 2003, disponible sur www.iecn.u-nancy.fr/∼deroton.

[dR1] A. de Roton, *On the mean square of an error term for an extended Selberg's class*, Acta Arith. **126** (2007), n°1, 417-445.

[dR2] A. de Roton, *Généralisation du critère de Beurling-Nyman pour l'hypothèse de Riemann généralisée*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), n°12, 6111-6126.

[KP0] J. Kaczorowski, A. Perelli, *The Selberg class: a survey*, Number theory in progress, Vol. 2 (Zakopane-Kościelisko, 1997), 953-992, de Gruyter, Berlin, 1999.

[KP1] J. Kaczorowski, A. Perelli, *On the prime number theorem for the Selberg class*, Arch. Math. **80** (2003), 255-263.

[KP2] J. Kaczorowski et A. Perelli, "Introduction to the Selberg Class of L-functions", livre en cours d'écriture.

[L] E. Landau *Über den Wertevorrat von $\zeta(s)$ in der Halbene $\sigma > 1$*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. I, **36** (1933), 81-91.

[M] M. R. Murty, *Stronger multiplicity one for Selberg's class.* In: Harmonic analysis and number theory (ed. by S.M. Drury and M.R. Murty; CMS Conf. Proc. 21), 133-142. American Mathematical Society, Providence 1997.

[S] A. Selberg *Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series*, Proceedings of the Almafi Conference on Analytic Number Theory, Università di Salerno (1992).

[Te] G. Tenenbaum, Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres, 3^e édition, Belin, 2008.

[Ti] E. C. Titchmarsh, The theory of the Riemann Zeta-function, Oxford University Press, 1951.

A. de Roton, Institut Elie Cartan UMR 7502 - Nancy Université, CNRS-INRIA,, BP 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy • *E-mail :* `deroton@iecn.u-nancy.fr`